

ΑΝΟΙΚΤΑ ΣΥΝΟΛΑ. ΚΛΕΙΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

6.1. 'Εξετάστε ποιά από τὰ παρακάτω σύνολα είναι (i) άνοικτά, (ii) κλειστά, (iii) φραγμένα. Βρείτε (iv) τὰ σύνολα τῶν όριακῶν σημείων τους και (v) τó κάλυμμά τους.

- (a) Οί άκέραιοι $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ τοῦ E^1 .
- (b) Τά σημεία (x, y) τοῦ επιπέδου xy γιά τὰ όποια $xy \neq 0$.
- (c) Τό σύνολο $\{1 + \frac{1}{2}, -(1 + \frac{1}{3}), (1 + \frac{1}{4}), -(1 + \frac{1}{5}), \dots, (-1)^n(1 + \frac{1}{n}), \dots\}$ τοῦ E^1 .
- (d) 'Η σπείρα τοῦ E^3 .
- (a) Τό σύνολο είναι κλειστό, γιατί τó συμπλήρωμά του είναι ένωση τῶν άνοικτῶν συνόλων $n-1 < x < n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Τό σύνολο προφανῶς δέν είναι φραγμένο και δέν έχει όριακά σημεία. Γιατί, άν δοθεῖ ένας πραγματικός αριθμός x_0 , μπορεί νά βρεθεῖ μιá περιοχή τοῦ x_0 , πού δέν περιέχει άκέραιους αριθμούς εκτός ένδεχομένως από τó x_0 . Τό κάλυμμα τοῦ συνόλου είναι τó ἴδιο τó σύνολο.
- (b) Τό σύνολο αὐτό αποτελείται από τó επίπεδο xy εκτός από τούς άξονες x και y . Τό σύνολο είναι άνοικτό, γιατί κάθε σημείο (x_0, y_0) τοῦ συνόλου έχει μιá ελάχιστη μή μηδενική απόσταση $d = \min\{|x_0|, |y_0|\}$ από τούς άξονες x και y και συνεπῶς υπάρχει μιá περιοχή τοῦ επιπέδου πού τó περιέχει και πού περιέχεται στό σύνολο. Τό σύνολο δέν είναι φραγμένο. Κάθε σημείο τοῦ συνόλου είναι όριακό. 'Επίσης, τὰ σημεία τῶν άξόνων x και y είναι όριακά. 'Ετσι, τó σύνολο τῶν όριακῶν σημείων είναι ὅλο τó επίπεδο xy . 'Επίσης τó κάλυμμά του είναι ὅλο τó επίπεδο xy .
- (c) Τό σύνολο δέν είναι ούτε άνοικτό ούτε κλειστό. 'Όπως φαίνεται και στό Σχ. 6-18, υπάρχει ένα σημείο τοῦ συνόλου, τó $(1 + \frac{1}{2})$, τοῦ όποιου κάθε περιοχή τῆς εὐθείας περιέχει σημεία πού δέν ανήκουν στό σύνολο. Συνεπῶς, τó σύνολο δέν είναι άνοικτό. 'Επίσης, κάθε περιοχή τοῦ αριθμοῦ 1 (τό 1 ανήκει στό συμπλήρωμα τοῦ συνόλου) περιέχει ένα στοιχείο τοῦ συνόλου (δηλαδή, έναν αριθμό πού δέν ανήκει στό συμπλήρωμα). 'Αρα τó συμπλήρωμα δέν είναι άνοικτό και συνεπῶς τó σύνολο δέν είναι κλειστό. Τό σύνολο είναι φραγμένο, άφου περιέχεται στό διάστημα $-2 < x < 2$. Τά όριακά του σημεία είναι οί αριθμοί 1 και -1 . Οί αριθμοί αὐτοί μαζί μέ τó σύνολο αποτελοῦν τó κάλυμμα τοῦ συνόλου.



Σχ. 6-18

- (d) 'Η σπείρα είναι κλειστό σύνολο, γιατί κάθε σημείο τοῦ συμπληρώματός του βρίσκεται σέ μή μηδενική απόσταση από τή σπείρα και συνεπῶς ανήκει σέ μιá περιοχή, ἡ όποία περιέχεται στό έσωτερικό τοῦ συμπληρώματος. 'Αρα τó συμπλήρωμα είναι άνοικτό και κατά συνέπεια ἡ σπείρα είναι κλειστό σύνολο. 'Η σπείρα είναι φραγμένο σύνολο. Κάθε σημείο τῆς σπείρας είναι όριακό σημείο, άφου γιά κάθε σημείο τῆς σπείρας ἡ τυχούσα περιορισμένη περιοχή του έχει μέ τή σπείρα τομή διάφορη τοῦ κενοῦ συνόλου. 'Αλλα όριακά σημεία δέν υπάρχουν, άφου κάθε κλειστό σύνολο περιέχει τὰ όριακά του σημεία. Τό κάλυμμα τῆς σπείρας είναι ἡ ἴδια ἡ σπείρα.